ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 4 FÉVRIER 1918.

PRÉSIDENCE DE M. PAUL PAINLEVÉ.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** annonce à l'Académie la mort à Genève, le 2 février 1918, de M. *Yung*, Correspondant de l'Académie pour la Section d'Anatomie et Zoologie.

THERMODYNAMIQUE. — *Formule donnant la tension de la vapeur saturée d'un liquide monoatomique.* Note [1] de M. E. **Ariès**.

La tension de la vapeur saturée d'un liquide quelconque soumis à l'équation d'état

$$p = \frac{RT}{v - \alpha} - \frac{K}{T^n (v + \beta)^2}, \tag{1}$$

α, β et, par suite, leur somme γ étant supposés fonctions de la température, est donnée, avec les notations convenues [2], par le système

$$x = \frac{\gamma}{\gamma_c} \tau^{n+1}, \qquad \Pi = \tau^{n+2} \frac{Z}{x}. \tag{2}$$

Ces deux équations sont liées l'une à l'autre par la Table de Clausius.

Le calcul de la tension de vapeur saturée à une température quelconque n'exige donc que la connaissance de l'exposant n, de la fonction $\frac{\gamma}{\gamma_c}$ et des constantes critiques P_c et T_c, ces dernières permettant de passer de la

---

[1] Séance du 28 janvier 1918.

[2] *Comptes rendus*, t. 166, 1918, p. 59.

température réduite τ ou de la tension réduite Π à la température absolue T ou à la tension P exprimée, par exemple, en atmosphères.

Nous avons admis que l'exposant n, commun à tous les corps monoatomiques, était égal à $\frac{1}{2}$. L'objet de la présente Note serait de démontrer qu'il existe aussi, pour tous ces corps, une seule et même fonction $\frac{\gamma}{\gamma_c}$, celle-ci étant exprimée à l'aide de la variable réduite τ, ce qui établirait, du même coup, que la tension de la vapeur saturée des corps monoatomiques satisfait à la loi sur les états correspondants.

Par la méthode que nous avons indiquée, on arrive à donner à cette fonction une expression unique qui paraît convenir aux trois corps étudiés dans l'une de nos dernières Notes. Il importe pour cela de se guider sur les remarques suivantes :

La valeur de cette fonction doit être égale à l'unité à la température critique, pour $\tau = 1$, puisqu'elle devient alors $\frac{\gamma_c}{\gamma_c}$.

Si la détermination que nous nous proposons de faire de la fonction $\frac{\gamma}{\gamma_c}$ est basée sur la considération de l'état de saturation, alors que τ ne varie que de zéro à l'unité, cette fonction conserve toute sa portée en dehors de ces limites de température jusqu'aux plus élevées, dans l'équation d'état (1), qui ne s'applique pas seulement aux fluides saturés. Or, tout ce qui a été écrit sur les covolumes α et β tend à admettre que ces quantités gardent une valeur finie, quelle que soit la température du fluide envisagé. Il en est donc de même pour leur somme γ, d'où résulte que $\frac{\gamma}{\gamma_c}$ doit rester fini, alors même que τ tendrait soit vers zéro, soit vers l'infini.

Les tensions de la vapeur saturée du crypton, du xénon et de l'argon, observées à différentes températures et consignées sur le Tableau qui figure aux *Comptes rendus*, t. 165, 1917, p. 1090, peuvent servir à calculer, pour chaque corps et à chaque température d'observation, la valeur de la fonction $\frac{\gamma}{\gamma_c}$ encore inconnue, et qui doit s'accorder avec le système des deux équations (2). Les valeurs ainsi obtenues montrent que :

1° Pour une température réduite donnée, $\frac{\gamma}{\gamma_c}$ a assez sensiblement la même valeur pour les trois corps (loi sur les états correspondants).

2° Cette valeur, déjà voisine de l'unité aux plus basses températures

observées, mais plus grande que l'unité (1,09 environ pour le xénon à la température réduite 0,5173), décroît à mesure que la température augmente, passe au-dessous de l'unité, à partir de la température $\tau = 0,84$ environ, et revient nécessairement, comme cela doit être, égal à l'unité à la température critique ($\tau = 1$).

Ces remarques conduisent assez naturellement à essayer la formule

$$(3) \qquad \frac{\gamma}{\gamma_c} = 1 + \frac{(1-\tau)(0,84-\tau)}{A\tau^2 + B}.$$

Comme il convenait, son second membre devient égal à l'unité pour $\tau = 0,84$ et $\tau = 1$. Le numérateur du terme variable étant du second degré, il devait en être de même du dénominateur pour que $\frac{\gamma}{\gamma_c}$ conservât une valeur finie quand τ s'annule ou devient infini. En vue de simplifier ce dénominateur, le terme du premier degré en τ a été supprimé. Il restait à déterminer les deux constantes A et B, ce qui était facile avec les deux équations du premier degré en A et B que l'on obtient, quand on remplace $\frac{\gamma}{\gamma_c}$ et τ dans la formnle (3) par leurs valeurs se rapportant à deux des températures d'observation qui figurent sur notre Tableau.

Suivant les deux températures choisies, A et B varient, mais dans des limites assez étroites, A restant très voisin de 2 et B assez voisin de 1. En posant $A = 2$ et $B = 1,20$, la formule précédente devient

$$(4) \qquad \frac{\gamma}{\gamma_c} = 1 + \frac{(1-\tau)(0,84-\tau)}{2\tau^2 + 1,20}$$

et la formule (2), qui donne la tension de la vapeur saturée, prend pour les corps monoatomiques, en y faisant $n = \frac{1}{2}$, sa forme définitive.

$$(5) \qquad x = \left(1 + \frac{(1-\tau)(0,84-\tau)}{2\tau^2 + 1,20}\right)\tau^{\frac{3}{2}}, \qquad \Pi = \tau^{\frac{5}{2}}\frac{Z}{x}.$$

Les résultats obtenus par l'application de cette formule générale aux trois corps qui ont servi à l'établir figurent dans le nouveau Tableau ci-après. Ils nous paraissent aussi satisfaisants que possible. Ce n'est du reste que sous réserve que nous donnons de $\frac{\gamma}{\gamma_c}$ l'expression (4); il est possible que l'étude des corps d'une atomicité plus élevée conduise à la modifier.

Pour le crypton, on ne relève dans ce Tableau que deux températures $T = 111,0$ et $T = 170,8$ pour lesquelles la différence entre la tension observée et la tension calculée acquiert une certaine importance.

Température absolue T.	Température réduite τ.	Tension de la vapeur saturée réduite. Π obs.	Π calc.	Tension de la vapeur saturée en atmosphères. P obs.	P calc.
		Crypton ($T_c = 210,4$; $P_c = 54^{atm},26$).			
111,0	0,5276	0,0072	0,0081	0,39	0,44
121,1	0,5756	0,0184	0,0190	1,00	1,03
124,7	0,5927	0,0243	0,0247	1,32	1,34
135,1	0,6421	0,0484	0,0489	2,63	2,66
147,2	0,6996	0,0969	0,0966	5,26	5,28
161,85	0,7692	0,194	0,193	10,53	10,48
170,8	0,8118	0,291	0,279	15,79	15,14
179,35	0,8524	0,388	0,384	21,05	20,83
185,9	0,8836	0,485	0,482	26,32	26,16
191,6	0,9106	0,582	0,580	31,58	31,47
196,6	0,9344	0,679	0,676	36,84	36,68
201,1	0,9558	0,776	0,773	42,11	41,95
207,15	0,9869	0,921	0,929	50,00	50,43
		Xénon ($T_c = 287,67$; $P_c = 57^{atm},24$).			
148,8	0,5173	0,0068	0,0068	0,39	0,39
163,5	0,5684	0,0174	0,0170	1,00	0,98
168,7	0,5864	0,0230	0,0225	1,32	1,29
182,8	0,6355	0,0459	0,0450	2,63	2,58
199,5	0,6935	0,0919	0,0903	5,26	5,17
219,5	0,7630	0,184	0,182	10,53	10,42
233,0	0,8100	0,276	0,275	15,79	15,73
243,6	0,8468	0,368	0,368	21,05	21,05
252,5	0,8777	0,460	0,460	26,32	26,32
260,1	0,9042	0,552	0,553	31,58	31,64
267,1	0,9285	0,644	0,651	36,84	37,24
273,6	0,9511	0,736	0,749	42,11	42,85
281,8	0,9796	0,874	0,889	50,00	50,86
		Argon ($T_c = 150,6$; $P_c = 48^{atm},00$).			
79,0	0,5246	0,0081	0,0077	0,39	0,37
87,1	0,5784	0,0208	0,0199	1,00	0,96
97,85	0,6497	0,0547	0,0540	2,63	2,60
107,2	0,7118	0,1095	0,1092	5,26	5,25
118,5	0,7869	0,219	0,226	10,53	10,87
126,7	0,8413	0,329	0,353	15,79	16,91
132,2	0,8778	0,462	0,462	22,18	22,18
138,3	0,9183	0,610	0,610	29,26	29,26
143,2	0,9508	0,747	0,749	35,85	35,95
147,5	0,9794	0,885	0,889	42,46	42,65
150,3	0,9980	0,990	0,989	47,50	47,45

Pour le xénon, l'accord est remarquable pour onze températures sur treize. Ce n'est qu'aux deux températures les plus voisines de l'état critique qn'il se présente un écart trop accentué entre les tensions à comparer. Il est à noter que cette particularité ne se produit pas pour les deux autres corps : leurs tensions de vapeur, aux hautes températures, sont, au contraire, assez rigoureusement représentées par la formule.

Enfin, pour l'argon, il n'existe qu'une seule température, $T = 126,7$, pour laquelle l'écart entre la tension observée et la tension calculée devient vraiment exagéré ; encore faut-il remarquer que cette température est encadrée par deux autres qui donnent lieu, la plus élevée surtout, à un accord très satisfaisant, ce qui pourrait peut-être s'expliquer par quelque erreur accidentelle sur les observations faites à la température 126,7 [1].

PALÉONTOLOGIE. — *Le plus ancien Poisson Characinide, sa signification au point de vue de la distribution actuelle de cette famille.* Note [2] de **M. G.-A. Boulenger.**

Dans ces derniers temps on s'est appuyé de plus en plus, et avec raison, sur la géologie en discutant la distribution géographique des animaux, reconnaissant l'insuffisance de conclusions tirées uniquement de la faune actuelle; mais souvent avec abus d'hypothèses, invoquant, selon les besoins, des connexions continentales passées répondant à des idées préconçues et ne reposant sur aucune donnée paléogéographique sérieuse [3].

Les opinions ont beaucoup varié, et varient encore, relativement à la question de l'époque à laquelle un pont à travers l'Atlantique, reliant l'Afrique et l'Amérique du Sud, a cessé d'exister et jusqu'ici j'ai cru devoir me ranger du côté de ceux qui hésitent à l'admettre au delà de l'Éocène le plus inférieur; parmi ceux-ci, l'ichthyologiste C.-H. Eigenmann s'est prononcé dernièrement avec beaucoup d'assurance [4].

A ce propos, je me souviens d'une petite discussion en 1905, au cours d'une séance de la Section zoologique de l'Association britannique à Cape

---

[1] Les données de l'expérience qui nous ont servi sont extraites du *Recueil des Constantes physiques* (1913), de la Société française de Physique, p. 284 et 285.

[2] Séance du 28 janvier 1918.

[3] Voir G.-A. Boulenger, *Presidential Address*, Section D (*Rep. Brit. Assoc.*, 1905, p. 412).

[4] *Rep. Princeton Exped.*, t. 3, 1909, p. 370.

Town. M. W.-B. Scott avait attiré l'attention sur la découverte, dans le Miocène de la Patagonie, de *Necrolestes* Ameghino, mammifère voisin des Chrysochlores, type qui n'était connu auparavant que comme vivant au sud de l'Afrique, et il considérait cette découverte comme une confirmation frappante de la théorie d'une connexion continentale post-crétacée reliant l'Afrique à l'Amérique du Sud (1). Je me permis d'observer que, vu l'insuffisance de nos connaissances paléontologiques d'aussi petits animaux et la nature très primitive de ce groupe d'Insectivores, il semblait prématuré de tirer de telles conclusions, ajoutant que l'avenir pourrait bien nous révéler une distribution très étendue de ces Insectivores, comprenant même l'Amérique du Nord, qui expliquerait autrement leur mode de dispersion. Je pense que la plupart de ceux qui étaient présents à cette discussion s'étaient rangés du côté de M. Scott; et cependant, un an après, on annonçait la découverte aux États-Unis d'un nouveau genre voisin des Chrysochlores : *Xenotherium* Douglass, de l'Oligocène inférieur de Montana et du Miocène inférieur de Dakota (2). D'autres découvertes successives dans l'Éocène inférieur, l'Oligocène et le Miocène ont fourni à M. Matthew (3) les matériaux pour un travail très intéressant qui explique la dispersion des Insectivores en question sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à l'hypothèse d'une communication directe entre l'Afrique et l'Amérique du Sud.

En 1901, traitant de la distribution des Poissons d'eau douce de l'Afrique, j'exprimai l'opinion que : « Les rapports avec l'Amérique tropicale sont sans doute le résultat de la persistance dans ces deux parties du monde de types, plus généralement répandus à une époque plus reculée, qui seraient venus à disparaître des autres régions, comme la Paléontologie nous le montre d'ailleurs à l'égard des Dipneustes, qui sont précisément dans ce cas. Point n'est besoin, pour expliquer ces similitudes, de faire intervenir l'hypothèse d'une continuité continentale qui n'a pu exister qu'à une époque antérieure au développement des groupes de poissons téléostéens que l'Afrique et l'Amérique du Sud possèdent en commun » (4). Un

---

(1) Voir W.-B. Scott, *Mammalia of the Santa Cruz beds* (*Rep. Princeton Exped.*, t. 5, 1905, p. 365).

(2) Voir W.-D. Matthew, *Fossil Chrysochloridæ in North America* [*Science* (New-York), t. 24, 1906, p. 786].

(3) W.-D. Matthew, *A Zalambdodont Insectivore from the Basal Eocene* (*Bull. Amer. Mus. N. H.*, t. 32, 1913, p. 307).

(4) *Poissons du Bassin du Congo*, Introduction, p. viii.

peu plus tard, cependant ([1]), je crus devoir faire des réserves au sujet des Characinides, en raison des caractères morphologiques de ces poissons, qu'on est en droit de considérer comme les représentants du groupe ancestral dont tous les autres Ostariophysiens (Silurides, Cyprinides, Gymnotides, etc.) seraient dérivés.

L'habitat des Characinides est aujourd'hui restreint aux eaux douces de l'Amérique centrale et méridionale et de l'Afrique; les types les plus primitifs (*Erythrinus*, *Macrodon*) se rencontrent dans le Nouveau-Monde, qui est non seulement le plus riche en espèces (600 à 700 contre 120), mais qui présente aussi la plus grande variété de formes génériques. Puisque les Silurides et les Cyprinides étaient représentés dans l'Éocène, il était légitime de supposer que les Characinides devaient remonter au moins au Crétacé supérieur, malgré l'absence de toute indication fournie par la Paléontologie. Cette induction, basée uniquement sur la morphologie, vient de recevoir sa confirmation si, comme il paraît très probable, nous pouvons nous rallier à l'opinion de M. Eastman ([2]), qui, à la suite d'une comparaison avec les genres *Hydrocyon*, de l'Afrique, et *Macrodon* (*Hoplias*), de l'Amérique du Sud, n'hésite pas à rapporter aux Characinides les dents isolées qui ont été décrites sous les noms de *Onchosaurus*, *Ischyrhiza* et *Gigantichthys*. Dans une publication antérieure, M. Eastman ([3]) avait conclu à l'identité générique, peut-être même spécifique, de *Onchosaurus radialis* Gervais ([4]), de la Craie de Meudon, retrouvé plus tard dans la Craie de Maestricht, que Gervais croyait avoir appartenu à un Mosasaurien, et de *Ischyrhyza antiqua* Leidy ([5]), du Crétacé supérieur des États-Unis, qui avait été placé provisoirement parmi des Enchodontides et les Esocides; et il rapportait au même genre *Titanichthys pharao* Dames ([6]), du Sénonien de Giza en Égypte.

([1]) *Rep. Brit. Assoc.*, 1905, p. 417.

([2]) C.-R. Eastman, *Dentition of* Hydrocyon *and its supposed allies* (*Bull. Amer. Mus. N. H.*, t. 37, 1917, p. 757, pl. 84-87). — Si M. Eastman avait fait des recherches bibliographiques plus étendues, il aurait trouvé que le mode de remplacement des dents de *Hydrocyon* a été mentionné, avec figure à l'appui, en 1907 (Boulenger, *Fishes of the Nile*, p. 99); par suite d'inadvertance, cette figure est indiquée comme représentant la mâchoire inférieure au lieu de la supérieure.

([3]) *Amer. Natur.*, t. 38, 1904, p. 298.

([4]) *Zoologie et Paléontologie françaises*, t. 1, 1852, p. 262, pl. 59, fig. 26.

([5]) *Proc. Acad. Philad.*, 1856, p. 256.

([6]) *Sitzb. Ges. Nat. Fr. Berl.*, 1887, p. 69, figure. — Le nom générique étant préoccupé a été changé en celui des *Gigantichthys* par Dames, *t. c.*, p. 137.

Puisque *Onchosaurus* avait une distribution si étendue dans les mers de l'hémisphère boréal, et en acceptant l'interprétation de M. Eastman, on pourrait conclure à l'origine marine de l'ensemble des Ostariophysiens (il existe encore des Silurides marins); la question de la distribution actuelle des Characinides en serait simplifiée. Il faut admettre cependant que, selon toute probabilité, les Characinides primitifs, de même que les Silurides, se sont séparés de bonne heure en marins et en dulcaquicoles, bien que l'absence de documents paléontologiques nous empêche encore de nous rendre compte des rapports qui les reliaient; mais s'il est établi que la famille remonte au Crétacé supérieur, il n'y a plus aucune raison de refuser d'admettre une communication continentale transatlantique pour expliquer l'affinité de certains Characinides actuels de l'Afrique et de l'Amérique, comme j'en exprimais l'opinion en 1905, tout en repoussant pareille explication pour d'autres groupes de Poissons d'eau douce plus avancés au point de vue de l'évolution.

En tirant ces conclusions, je m'appuyais surtout sur les vues de Ortmann [1] concernant les changements dans la paléogéographie survenus aux périodes crétacée [2] et éocène, bien qu'admettant, à l'exemple de Engler [3], les imperfections de ces hypothèses et de tant d'autres [4], au sujet desquelles il est prudent de ne pas se prononcer pour le moment.

M. A. Laveran présente à l'Académie le Tome 10 du *Bulletin de la Société de Pathologie exotique*.

---

(1) A.-E. Ortmann, *The geographical distribution of freshwater Decapods and its bearing upon ancient Geography* (*Proc. Amer. Philos. Soc.*, t. 41, 1903, p. 267).

(2) Ceinture continentale (*Mesozonia*) de Ortmann à l'époque du Crétacé supérieur. Les cartes qui accompagnent ce travail sont très suggestives, mais, ainsi qu'Albert de Lapparent m'en informait déjà peu de temps après leur publication, elles demandent à être sérieusement revisées.

(3) *Sitzb. Acad. Berl.*, 1905, p. 184, 230.

(4) Voir R.-F. Scharff, *On the Evolution of Continents* (*Proc. 7th Intern. Congr. Zool.*, 1907, p. 855) et H. von Ihering, *Archhelenis und Archinotis* (Leipzic, 1907). Cette dernière publication contient d'étonnantes bévues relativement à la distribution actuelle des Batraciens et des Poissons; par exemple l'habitat assigné à *Hypogeophis rostratus* et l'attribution de Characinides et de Cyprinides à Madagascar (p. 194, 195).

COMMISSIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à la désignation de sept membres qui formeront avec le Bureau la Commission du prix Le Conte : MM. **Lippmann**, **Appell**, **Sebert**, **Haller**, **Douvillé**, **Mangin**, **Quénu** obtiennent la majorité des suffrages.

RAPPORTS.

Rapport sommaire de la Commission de Balistique,
par M. **P. Appell**.

La Commission de Balistique a reçu du Bureau de l'Académie les cinq volumes que M. l'ingénieur général Charbonnier a présentés à l'Académie (séance du 21 janvier 1918) : ces volumes forment un ouvrage qui a pour titre général : *Traité de Balistique extérieure;* ils portent les titres suivants :

Tome I : *Balistique extérieure rationnelle. Problème balistique principal :* 1re partie : *Les cas limites du problème balistique;* 2e partie : *Les théorèmes généraux de la balistique extérieure.*

Tome II : *Balistique extérieure rationnelle. Problème balistique principal :* 3e partie : *Les théories balistiques.*

Tome III : *Balistique extérieure rationnelle. Problèmes balistiques secondaires.*

Tome IV : *Balistique extérieure expérimentale.*

Tome V : *Historique et Bibliographie.*

La Commission a reçu, en outre, du même auteur, à la date du 4 février 1918, le Tome I d'un *Traité de Balistique intérieure*, comprenant : 1re partie : *Balistique intérieure théorique;* 2e partie : *Balistique intérieure expérimentale*. Ce recueil est accompagné d'un fascicule intitulé : *Historique de la balistique intérieure :* 1er fascicule : *De l'origine de l'artillerie au* XIXe *siècle.*

La Commission signale également un envoi de M. Malluret, reçu à la date du 14 septembre 1917 et intitulé : *Sur un second claquement des projectiles à grande vitesse; erreurs dues au claquement des projectiles à grande vitesse.*

CORRESPONDANCE.

MM. **M. Laubeuf, Charles Meunier-Dollfus, Charles Rabut** prient l'Académie de vouloir bien les compter au nombre des candidats aux places de la division, nouvellement créée, des *applications de la Science à l'Industrie.*

M. **G. Perrier** prie l'Académie de vouloir bien le compter au nombre des candidats à la place vacante, dans la Section de Géographie et Navigation, par le décès de M. le général *Bassot.*

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la correspondance :

1° Capitaine Julien. *La motoculture.*

2° *Introduction à l'étude pétrographique des roches sédimentaires*, par M. Lucien Cayeux. (Présenté par M. P. Termier.)

3° *Recherches sur les terrasses alluviales de la Loire et de ses principaux affluents*, par M. E. Chaput. (Présenté par M. Ch. Depéret.)

GÉOMÉTRIE. — *Sur le dilemme de J. Bolyai.* Note [1] de M. **P. Barbarin.**

J. Bolyai (*Appendix scientiam*, § 43) conclut par ce dilemme caractéristique : *Aut Axioma XI Euclidis verum, aut quadratura circuli geometrica,* et montre qu'un cercle plan $\pi \operatorname{tang}^2 z$ peut être carré par le moyen de lignes uniformes (horicycles de Lobatchefsky).

Je me propose d'exécuter *entièrement* les constructions sur le plan par les

---

[1] Séance du 28 janvier 1918.

moyens ordinaires, avec le triangle et le quadrilatère rectangles, en ajoutant de nouveaux tracés à ceux indiqués dans la Thèse de M. Gérard et dans mes *Études de Géométrie non euclidienne* (Académie de Bruxelles, 1900).

Soient $\omega = \frac{\mu}{m+\mu}\pi$ l'angle du carré, ρ sa demi-diagonale, r le rayon du cercle équivalent. Sur le plan de Riemann, μ étant moindre que m, on a

$$\cos r = \frac{2m}{m+\mu}, \qquad \cos\rho = \operatorname{tang}\left(\frac{m}{m+\mu}\,\frac{\pi}{2}\right);$$

sur le plan de Bolyai-Lobatchefsky, il faut prendre $\operatorname{ch} r$ et $\operatorname{ch}\rho$, μ étant supérieur à m.

I. *Tout angle à tangente rationnelle peut être construit.* — D'abord, connaissant $\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{p} = f\left(\frac{1}{p}\right)$, je puis construire $f\left(\frac{1}{2p}\right)$ par le moyen d'un cercle de diamètre AOB, où la corde AD fait l'angle $\text{DAB} = f\left(\frac{1}{p}\right)$. La corde BD coupant la tangente AC au point C, on abaisse AE perpendiculaire sur OC; EAB est l'angle cherché. Ceci posé, soit

$$\alpha = f\left(\frac{1}{2p-1}\right), \qquad \beta = f\left(\frac{1}{2p}\right) \qquad \text{et} \qquad \gamma = f\left(\frac{1}{2p+1}\right).$$

Comme des triangles rectangles évidents donnent

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}},$$

avec α et β on peut obtenir γ. Dès lors, on a de proche en proche

$$f\left(\frac{1}{2}\right), \qquad f\left(\frac{1}{3}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right), \qquad f\left(\frac{1}{4}\right), \qquad f\left(\frac{1}{5}\right), \qquad \ldots, \qquad f\left(\frac{1}{m}\right).$$

Enfin, on a $f\left(\frac{m}{n}\right)$ par de nouveaux triangles.

II. *Tout angle à sinus rationnel peut être construit.* — En effet, la formule

$$\sin x = \frac{m}{n} = \sin\frac{\pi}{6}\,\frac{\operatorname{tang} f\left(\frac{1}{n}\right)}{\operatorname{tang} f\left(\frac{1}{2m}\right)}$$

n'exige que des triangles rectangles élémentaires.

III. Toute ligne X du plan de Bolyai qui a son cosinus hyperbolique rationnel peut être construite au moyen de son angle de parallélisme $x = \Pi(X)$, car

$$\sin x = \frac{1}{\operatorname{ch} X} = \frac{n}{m}.$$

J'ai montré [1] que le plan de Riemann renferme un fait analogue, et donné le moyen de tracer la ligne X aux extrémités de laquelle les perpendiculaires se coupent sous l'angle connu $x = \Phi(X)$.

IV. *Tout carré dont l'angle* ω *est la fraction* $\frac{2\mu}{m+\mu}$ *d'angle droit peut être transformé en un cercle équivalent. Si, de plus,* $m+\mu$ *est un des nombres de Gauss pour l'inscription des polygones réguliers, tout cercle dont l'aire égale* $\pm 2\pi\frac{m-\mu}{m+\mu}$ *peut être transformé en carré.*

En effet, dans la géométrie de Riemann, les formules

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{2m}{m+\mu}, \quad x = \Phi(r), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{m}{m+\mu}\frac{\pi}{2}\right), \quad y = \Phi(\rho),$$

et dans la géométrie de Bolyai-Lobatchefsky,

$$\sin x = \frac{m+\mu}{2m}, \quad x = \Pi(r), \quad \sin y = \operatorname{tang}\left(\frac{\mu}{m+\mu}\frac{\pi}{2}\right), \quad y = \Pi(\rho)$$

permettent de construire dans tous les cas r et ρ.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les équations fonctionnelles et les propriétés de certaines frontières.* Note de M. **P. Fatou.**

Une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine D étant supposée vérifier une équation fonctionnelle telle que $A\{z, f(z), f[R(z)]\} = 0$, A et R fonctions rationnelles données, il arrive souvent que cette équation permet de faire le prolongement analytique de $f(z)$ dans un domaine plus étendu et même de trouver les propriétés de $f(z)$ dans tout son domaine d'existence. Il y a là l'origine d'une extension de la notion même de prolongement analytique pour certaines classes de fonctions. Pour l'instant nous allons seulement utiliser ce mode de prolongement pour démontrer une propriété des frontières des domaines invariants par la substitution $(z|R(z))$.

---

[1] *Constructions sphériques* (*Mathesis*, 1899), et *Géométrie non euclidienne*, p. 57.

Soient α un point double de la substitution tel que $|R'(\alpha)| < 1$, d un domaine invariant contenant α, supposé simplement connexe et limité par un contour $\mathcal{C}$ [1]. *Je dis que $\mathcal{C}$ ne peut être constitué par un arc régulier de courbe analytique que si $(z|R(z))$ est une substitution possédant un cercle fondamental et $\mathcal{C}$ sa circonférence.*

En effet, la représentation conforme de d sur le cercle $C(|t| \leqq 1)$ étant définie par

$$z = h(t), \qquad h(o) = \alpha,$$

$h(t)$ est holomorphe pour $|t| \leqq R (R > 1)$. La relation $z_1 = R(z)$ dans d équivaut dans C à $t_1 = \varphi(t)$. On verra que φ est holomorphe pour $|t| \leqq 1$ et transforme le cercle C en lui-même. Le principe de prolongement par symétrie de Schwarz montre que φ est rationnelle et définit une substitution à cercle fondamental C, avec les points doubles o et ∞.

Je vais démontrer que $h(t)$ est elle-même rationnelle. En effet, $h(t)$ vérifie l'équation

$$h[\varphi(t)] = R[h(t)], \tag{1}$$

qui entraîne une ou plusieurs relations telles que

$$R[h(t)] = R\{h[\varepsilon(t)]\}, \tag{2}$$

$\varepsilon(t)$, fonctions algébriques ou rationnelles (autres que t) telles que $\varphi[\varepsilon(t)] = \varphi(t)$. Il importe de remarquer que les valeurs multiples des fonctions $\varphi_{-1}(t)$, $\varepsilon(t)$, considérées dans tout le plan, peuvent être permutées entre elles par des lacets décrits à l'intérieur de C.

Ceci posé, $h(t)$ étant holomorphe dans une couronne Γ autour de C, on pourra rétrécir Γ de manière que les équations (1) et (2) y conservent un sens et soient encore vérifiées [2]. Transformons Γ en Γ_1 par $t_1 = \varphi(t)$. La relation $h(t_1) = R[h(t)]$ permettra de définir $h(t)$ dans $\Gamma_1 > \Gamma$. En vertu des remarques précédentes la fonction ainsi définie l'est sans ambiguïté; elle y est uniforme et coïncide avec la fonction initiale dans Γ. De plus, les équations (2) sont encore vérifiées dans Γ_1.

---

(1) Pour que le domaine restreint d soit simplement connexe il suffit : 1° ou bien que ce domaine renferme un seul point critique de $R_{-1}(z)$; 2° ou bien qu'il existe un autre point double de même espèce dont le domaine total est d'un seul tenant, comme cela a lieu pour D_∞ quand $R(z)$ est un polynome.

(2) On peut par exemple, pour supprimer toute difficulté, remplacer Γ par une région antécédente contenue dans Γ et ne renfermant aucun point critique de $\varphi_{-1}(t)$.

On continuera ainsi de proche en proche et l'on définira $h(t)$ dans Γ_2, $\Gamma_3, \ldots, \Gamma_n$. D'après des principes exposés antérieurement on atteindra ainsi tous les points du plan pour une valeur finie de n; on en conclut que $h(t)$ est uniforme et sans points singuliers essentiels, donc rationnelle.

Si $h(t)$ était de degré > 1, il correspondrait à un point z' intérieur à d au moins un point t' extérieur à C. Or

$$R_n(z') = h[\varphi_n(t')] \qquad \text{et} \qquad \lim_{n=\infty} \varphi_n(t') = \infty,$$

donc

$$\alpha = \lim_{n=\infty} R_n(z') = h(\infty).$$

Mais, d'autre part, à un point z'' de $\mathcal{C}$ correspondrait également un point t'' extérieur à C; on aurait

$$R_n(z'') = h[\varphi_n(t'')] \qquad \text{et} \qquad \lim_{n=\infty} R_n(z'') = h(\infty) = \alpha,$$

ce qui est impossible.

Finalement $h(t)$ est du premier degré, et le théorème annoncé s'en déduit immédiatement.

La démonstration doit être légèrement modifiée dans le cas où α n'a pas d'autre antécédent que lui-même dans d, ce qui a pour conséquence que $s = 0$ et $\varphi(t) = t^q$. Dans ce cas, on peut seulement affirmer que $h(t)$ est méromorphe, le point à l'infini n'étant pas atteint par le procédé ci-dessus. On a d'ailleurs $h(t^q) = R[h(t)]$ et l'étude de la représentation du point double α et des points de $\mathcal{C}$ dans tout le plan des t conduit à une impossibilité quand on prend pour $h(t)$ une transcendante méromorphe (1). La conclusion subsiste donc.

---

(1) On observera pour cela que la relation $t' = e^{\frac{2N i\pi}{q^n}} t$ entraîne

$$R_n[h(t')] = R_n[h(t)];$$

t étant donné, les points t' sont denses sur la circonférence $|t'| = |t|$. On en conclura que le domaine d aurait pour images des couronnes concentriques dans le plan des t, et que le point α aurait pour images des circonférences concentriques, ce qui est impossible.

ANALYSIS SITUS. — *Sur les courbes de M. Jordan.* Note de M. **Arnaud Denjoy**, présentée par M. Jordan.

C'est un théorème fondamental dû à M. Jordan, qu'une courbe continue, simple et fermée, divise le plan en deux régions. Mais, si je ne me trompe, nulle définition *analytique* de l'intérieur ni de l'extérieur d'une telle courbe n'a été déduite de ses équations paramétriques $x = f(t)$, $y = g(t)$. Telle est la question dont je me propose de donner ci-après une solution.

Soit E un ensemble *fermé non aligné* (non situé sur une droite unique). Convenons de dire qu'un point $M(\xi, \eta)$ est *intérieur à la borne convexe de* E, si les coordonnées de M sont de la forme $\xi = \sum_1^n K_i x_i$, $\eta = \sum_1^n K_i y_i$, les n points (x_i, y_i) *non alignés* $(n \geqq 3)$, appartenant à E, et les coefficients K_i étant des nombres positifs dont la somme est 1 (on montre que, dans le cas nous intéressant, n peut être réduit à 3). Nous appelons *borne convexe de* E la frontière B de l'ensemble des points M, *points périphériques de* E les points de E situés sur B (les autres points de B forment des segments rectilignes s dont les extrémités seules appartiennent à E), *droite bornante de* E toute droite Δ contenant au moins un point de E, et ne partageant pas E (c'est-à-dire telle que E ne possède pas de points des deux côtés de Δ). Par tout point K de B passe au moins une droite bornante de E. Celle-ci est unique, et c'est la droite indéfinie portant s, si K est étranger à E et intérieur au segment s de B.

Cela posé, soit B_0 la borne convexe (ou *borne d'ordre zéro*) d'une courbe de Jordan C.

Les points de C situés sur B_0 (au nombre de trois au moins) seront appelés *points périphériques d'ordre zéro de* C. On montre que leur ordre géométrique sur B_0 est identique ou inverse à celui des valeurs correspondantes de t comprises dans une même période convenablement choisie.

Nous appellerons *arcs primaires* de C les arcs g_1 dont tous les points, sauf les extrémités, sont intérieurs à B_0. Pour chacun de ces arcs, nous envisageons sa borne convexe, que nous appelons une *borne primaire de* C. Une telle borne $B_0(g_1)$ aura en commun avec B_0 le segment rectiligne joignant les extrémités de g_1. Les points périphériques d'un arc primaire quelconque g_1 seront appelés *points périphériques primaires* ou *d'ordre* 1 de C. Ces points séparent sur g_1 des arcs que nous qualifions de

secondaires, et dont les bornes convexes sont appelées *bornes secondaires de* C, etc. Généralement, par définition, une *borne d'ordre p de* C est la borne convexe d'un arc quelconque d'ordre p de C, les points périphériques de cet arc (sauf ses extrémités) sont des *points périphériques d'ordre p de* C et séparent sur le même arc des *arcs de* C *d'ordre* $(p+1)$. Cela étant, on peut énoncer le théorème suivant :

1° *Tout point* N *étranger à* C *est intérieur à un nombre limité q de bornes déduites de* C; 2° N *est extérieur ou intérieur à* C, *selon que q est pair ou impair.*

L'invariance de la parité de q dans une même région limitée par C est évidente, si l'on observe que tout chemin ne rencontrant pas C franchit les bornes par couples. D'où la parité de q, si N est extérieur à C, et aussi cette propriété, que le voisinage externe (savoir celui de la borne B_p contenant P_p) d'un point périphérique P_p d'ordre p, est extérieur ou intérieur à C, selon que p est pair ou impair.

Soit E_p l'ensemble des valeurs de t correspondant aux points de C périphériques d'ordre au plus égal à p. E_p est fermé. Un point (x_p, y_p), correspondant à t_p, est périphérique d'ordre p, si, t_p étant intérieur à l'un des contigus $i_{p-1,n}$ à E_{p-1}, il existe deux nombres non simultanément nuls a_p, b_p tels que

$$a_p[x(t)-x_p]+b_p[y(t)-y_p]$$

ne prenne pas les deux signes quant t décrit $i_{p-1,n}$. Soit $I_{p,n}$ l'ensemble de tous les points

$$\xi = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3, \qquad \eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$$

(k_1, k_2, k_3 positifs et de somme 1), les trois points (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3) non alignés correspondant à des valeurs τ_1, τ_2, τ_3 intérieures au contigu $t_{p.n}$ de E_p. $I_{p.n}$ est l'intérieur d'une borne convexe d'ordre p. C'est la parité du nombre q d'ensembles $I_{p,n}$ contenant le point N connu par ses coordonnées, qui fixe la région intérieure ou extérieure à C, à laquelle appartient N. Telle est la définition analytique que nous avions en vue pour ces deux régions.

La démonstration rigoureuse de ces propriétés paraîtra dans une autre publication.

Dans le cas d'un espace à $h(>2)$ dimensions, et d'un ensemble Ω correspondant point par point, continûment et réciproquement, à la surface d'une sphère à h dimensions, il semblerait possible d'aboutir au même

théorème que pour le cas du plan, en considérant comme points périphériques d'un ensemble E ceux par où passe une droite Δ limitant un demi-plan (à deux dimensions) dont aucun point intérieur n'appartient à E. Les points de l'espace, par où ne passe pas de droite Δ formeraient l'intérieur de la borne pseudo-convexe de E.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une définition des fonctions holomorphes.* Note de M. **D. Pompeiu**, présentée par M. Appell.

1. On sait qu'une fonction de variable complexe, holomorphe dans une région R (simplement connexe), peut être définie de trois [1] manières différentes, mais parfaitement équivalentes :

1° Par la condition de *monogénéité* en chacun des points intérieurs à R :

$$\lim \frac{f(z')-f(z)}{z'-z} = f'(z); \tag{1}$$

2° Par la condition (imposée *a priori*) de satisfaire à l'*équation intégrale*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \tag{2}$$

Γ étant un contour simple fermé, quelconque, tracé autour du point z, d'ailleurs quelconque, intérieur à R;

3° Par la condition intégrale (Morera)

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \tag{3}$$

pour *tout* contour fermé C tracé dans R; la *continuité* de $f(z)$ est sous-entendue.

Le raisonnement qui conduit à cette troisième condition de définition se trouve dès 1879 dans l'introduction (n° 14) de la *théorie des fonctions abéliennes* de Briot, mais c'est seulement en 1886 que le théorème a été explicitement formulé par Morera. La démonstration de Morera est indirecte.

---

[1] Je laisse expressément de côté la définition par un *élément de fonction* (série entière) parce que je ne m'occupe ici que des définitions *descriptives* et non constructives.

On trouvera une démonstration plus directe dans ma Thèse ([1]), réduisant la condition (3) à la condition (2).

2. A ces trois définitions on peut en adjoindre une quatrième qui se place entre la définition de Cauchy (monogénéité) et celle de Morera. Cette quatrième définition repose sur la notion de *dérivée aréolaire* que j'ai introduite à l'occasion de recherches sur les fonctions d'une variable complexe.

Convenons d'appeler *fonction de variable complexe* toute combinaison

$$u + iv \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

où u et v sont deux fonctions réelles de deux variables réelles, et posons

$$u + iv = f(z),$$

z étant le symbole habituel de la variable complexe; la fonction $f(z)$ étant supposée définie dans une certaine région R (simplement connexe) du plan des z. Prenons un point z intérieur à R, d'ailleurs quelconque, et autour de ce point traçons un contour simple fermé C : calculons l'intégrale

$$j = \int_C f(z)\, dz$$

et formons le rapport

$$A = \frac{j}{\alpha},$$

où α désigne l'aire de la portion du plan délimitée par C.

Si, lorsque C tend d'une façon quelconque vers le point z, le rapport A tend vers une limite bien déterminée, nous appellerons ce nombre-limite la *dérivée aréolaire* de $f(z)$ au point z : si cette limite existe en chacun des points intérieurs à R, on aura une fonction de z qui est la dérivée aréolaire de $f(z)$ dans la région R.

La notion de *dérivée aréolaire* étant ainsi introduite, on peut définir une fonction *holomorphe* dans les termes suivants : *c'est une fonction de variable complexe, continue, dont la dérivée aréolaire est nulle en chaque point.*

3. Pour montrer que cette nouvelle définition est équivalente aux autres définitions il suffit, évidemment, de la réduire à une quelconque des trois premières définitions, par exemple à la définition de Morera.

([1]) *Sur la continuité des fonctions de variables complexes* (*Annales de Toulouse*, 1905).

Voici comment on peut faire cette réduction (d'ailleurs le procédé de démonstration peut rendre des services dans d'autres questions analogues) :

Soit C un contour simple fermé, d'ailleurs quelconque, tracé dans R et soit

$$j = \int_C f(z)\,dz$$

l'intégrale de $f(z)$ prise le long de C. Je désigne par α l'aire de la région (C) et je pose

$$\zeta = \frac{j}{\alpha}.$$

Ensuite je partage la région (C) en un nombre n de régions et pour chacune de ces régions je forme l'intégrale j_k prise le long de la frontière C_k; je désigne par α_k l'aire de la région (C_k) et j'observe que

$$\alpha = \sum_1^n \alpha_k$$

et

$$j = \sum_1^n j_k,$$

si toutes les intégrales ont été prises dans le même sens.

J'observe maintenant que

$$\zeta = \frac{1}{\alpha}\sum_1^n j_k = \sum_1^n \frac{j_k}{\alpha_k}\,\frac{\alpha_k}{\alpha},$$

et je pose

$$\mu_k = \frac{\alpha_k}{\alpha}, \qquad \zeta_k = \frac{j_k}{\alpha_k}.$$

Alors j'ai

$$\zeta = \mu_1\zeta_1 + \ldots + \mu_k\zeta_k + \ldots + \mu_n\zeta_n,$$

les μ étant des nombres positifs dont la somme est égale à *un* et les ζ_k des nombres complexes : Il en résulte que ζ se trouve (comme centre de gravité des points ζ_k) à l'intérieur de tout polygone convexe qui contient tous les ζ_k. Mais on peut prendre n assez grand et les régions (C_k) assez petites [1] pour que les ζ_k soient, d'après l'hypothèse, aussi voisins qu'on

[1] C'est-à-dire pouvant être renfermées dans des cercles de rayon assez petit. Ici, pour la rigueur de la démonstration, on peut utiliser un lemme analogue à celui dont s'est servi M. Goursat dans sa démonstration classique du théorème fondamental de Cauchy.

voudra de *zéro* : il en sera donc de même de ζ et, comme ζ est un nombre déterminé, il ne peut être qu'égal à zéro.

Donc $\zeta = 0$ et alors $j = 0$.

Comme la courbe C, dont nous sommes partis, est une courbe fermée quelconque tracée dans R, nous nous trouvons ramenés au théorème de Morera.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — *Sur les quartiques gauches de première espèce.* Note de M. R. DE MONTESSUS DE BALLORE, présentée par M. Appell.

Les quartiques gauches de première espèce dépourvues de singularités peuvent être représentées paramétriquement par les fonctions elliptiques.

Les auteurs qui se sont occupé de cette question [1] ont employé des coordonnées qui, suivant les cas, sont réelles ou imaginaires. Il y a lieu de faire exception pour A. Enders [2], mais les formules qu'il obtient sont compliquées d'imaginaires, dont la présence n'est pas toujours justifiée.

De plus, réaliser les transformations permettant de passer des équations tétraédriques ou cartésiennes d'une quartique dépourvue de point singulier à ses équations paramétriques est un problème incomplètement résolu.

I. *Soit une quartique de première espèce, dépourvue de point singulier, pour laquelle le faisceau des quadriques correspondant comprend quatre cônes réels.*

Si l'on prend les sommets des quatre cônes pour sommets du tétraèdre de référence, les équations tétraédriques de la courbe sont de la forme

$$(1) \qquad \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma T^2 = 0, \qquad \delta X^2 + \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 = 0.$$

Je note, pour l'intelligence de ce qui suit, que les équations

$$(2) \qquad \frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu \operatorname{sn} u} = \frac{z}{\nu \operatorname{cn} u} = \frac{t}{\operatorname{dn} u} \qquad (\lambda, \mu, \nu \text{ réels})$$

représentent la courbe (1) sous condition de choisir convenablement λ, μ, ν et de faire correspondre, convenablement aussi, x, y, z, t à X, Y, Z, T.

---

(1) W. WILLING, *Dissert.*, Berlin, 1872, p. 11. — H. LÉAUTÉ, *Journal de l'École Polytechnique*, 1879, p. 65. — G. LORIA, *Atti R. Ac. Lin. Rend.*, 6e série, t. 2, 1890, p. 179. — H. HALPHEN, *Traité*, t. 2, p. 450. — D'ESCLAIBES, *Thèse*, p. 97.

(2) A. ENDERS, *Nova Acta Acad. Leop.*, t. 85, 1906, p. 401.

II. *Soit maintenant une quartique pour laquelle le faisceau des quadriques ne comprend plus que deux cônes réels.*

Les formules (2), appliquées à ces courbes, comportent évidemment un tétraèdre imaginaire et des coordonnées tétraédriques imaginaires.

En prenant pour sommets du tétraèdre de référence : 1° les sommets des deux cônes réels; 2° deux autres points réels convenablement choisis, Painvin (¹) a montré que les équations de ces quartiques sont de la forme

$$(3) \qquad y^2 + \mathrm{B}(z^2 - t^2) + 2\mathrm{D}zt = 0, \qquad x^2 + \mathrm{B}'(z^2 - t^2) + 2\mathrm{D}'zt = 0.$$

Si l'on pose

$$t = \alpha z,$$

puis (en supposant, par exemple, $\mathrm{B} = -p^2 < 0$, $\mathrm{D} = -q^2 < 0$)

$$\sin\varphi = \frac{p^2\alpha - q^2}{\sqrt{p^4 + q^4}},$$

il en résulte

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{t}{z} = \frac{\sqrt{p^4 + q^4}\sin\varphi + q^2}{p^2}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{\sqrt{p^4 + q^4}}{p}\cos\varphi, \\ &\frac{x}{z} = \frac{1}{p^2}\sqrt{\mathrm{B}'(p^4 + q^4)\sin^2\varphi + 2\sqrt{p^4 + q^4}(\mathrm{B}'q^2 - \mathrm{D}'p^2)\sin\varphi - \mathrm{B}'(p^4 - q^4) - 2\mathrm{D}'p^2q^2}; \end{aligned} \right.$$

on obtient des formules analogues si $\mathrm{B} < 0$, $\mathrm{D} > 0$; $\mathrm{B} > 0$, $\mathrm{D} > 0$; $\mathrm{B} > 0$, $\mathrm{D} < 0$. Le problème revient, dans chaque cas, à exprimer $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ et $\frac{x}{z}$ par les fonctions elliptiques. On y parvient en écrivant

$$\sin\varphi = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{2\beta}{1 + \beta^2},$$

et en exprimant β et la nouvelle expression, fonction de β^2, obtenue pour $\frac{x}{z}$ par les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, problème aisé à traiter.

On trouve ainsi

$$(5) \qquad \frac{x}{z} = \frac{\lambda \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\sigma + \omega \operatorname{sn}^2 u}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{\mu \operatorname{cn} u}{\sigma + \omega \operatorname{sn}^2 u}, \qquad \frac{t}{z} = \frac{\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho}{\sigma + \omega \operatorname{sn}^2 u},$$

où : 1° $k^2 < 1$; 2° $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\rho}{\nu}$, $\frac{\sigma}{\nu}$, $\frac{\omega}{\nu}$, k^2 sont des fonctions réelles et faciles à calculer de B, D, B′, D′. *Les formules* (5) *sont uniques de leur espèce si* $k^2 < 1$.

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1868.

III. *Soit, en dernier lieu, une quartique pour laquelle les quatre cônes sont imaginaires.* Les tétraèdres employés dans les cas I, II sont imaginaires; mais, en choisissant convenablement le tétraèdre (réel) de référence, les équations de la quartique peuvent être ramenées à la forme

$$(6) \qquad x^2 - y^2 = b(z^2 - t^2) + 2dzt, \qquad 2xy = e(z^2 - t^2) + 2hzt$$

et peuvent être écrites

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \sqrt{\frac{B + iA}{2}} + \sqrt{\frac{B - iA}{2}}, \qquad i\left(\frac{x}{z} - \frac{y}{z}\right) = \sqrt{\frac{B + iA}{2}} - \sqrt{\frac{B - iA}{2}},$$

$$A = b(1 - \alpha^2) + 2d\alpha, \qquad B = e(1 - \alpha^2) + 2h\alpha, \qquad \alpha = \frac{t}{z}.$$

Posons

$$\beta^2 = -(e + ib)\alpha^2 + 2(h + id)\alpha + e + ib;$$

soit α_0 une racine du second membre; écrivons encore $\beta = \rho(\alpha - \alpha_0)$, on a

$$\rho\alpha - \beta = \rho\alpha_0, \qquad (e + ib)\alpha + \rho\beta = -(e + ib)\alpha_0 + 2(h + id),$$

ce qui donne pour α, β des expressions de la forme

$$\alpha = \frac{C\rho^2 + D}{\rho^2 + E}, \qquad \beta = \frac{F\rho}{\rho^2 + E},$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) = \frac{F\rho + \sqrt{(-e + ib)(C\rho^2 + D)^2 + 2(h + id)(C\rho^2 + D)(\rho^2 + E) + (e - ib)(\rho^2 + E)^2}}{\rho^2 + E},$$

$$i\sqrt{2}\left(\frac{x}{z} - \frac{y}{z}\right) = \frac{F\rho - \sqrt{(-e + ib)(C\rho^2 + D)^2 + 2(h + id)(C\rho^2 + D)(\rho^2 + E) + (e - ib)(\rho^2 + E)^2}}{\rho^2 + E};$$

ρ, $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ deviennent exprimables par $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ et l'on trouve

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{z} = \dfrac{p(1 - i)\operatorname{sn} u + q(1 + i)\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{r\operatorname{sn}^2 u + s}, \\[2ex] \dfrac{y}{z} = \dfrac{p(1 + i)\operatorname{sn} u + q(1 - i)\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{r\operatorname{sn}^2 u + s}, \qquad \dfrac{t}{z} = \dfrac{m\operatorname{sn}^2 u + n}{r\operatorname{sn}^2 u + s}, \end{cases}$$

où le module k^2 est réel et moindre que 1; k est la racine comprise entre -1 et $+1$ de l'équation

$$(ed - bh)k^2 - k(b^2 + e^2 + d^2 + h^2) + ed - bh = 0;$$

$\frac{m}{n}$, $\frac{p}{n}$, $\frac{q}{n}$, $\frac{r}{n}$, $\frac{s}{n}$ sont calculables en fonction de b, d, e, h (6), mais sont compliqués d'imaginaires. *Les formules* (7) *sont uniques de leur espèce*, si $k^2 < 1$, sauf qu'il en existe d'analogues en $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$ au lieu de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Nouvelle méthode de formation des nitriles par catalyse.* Note (¹) de MM. **Alph. Mailhe** et **F. de Godon.**

On sait que les aldéhydes réagissent à froid sur l'ammoniaque, en présence d'éther ou d'eau pour donner des combinaisons généralement solides :

$$RC\begin{matrix}\diagup O\\ \diagdown H\end{matrix} + NH^3 = RCH\begin{matrix}\diagup OH\\ \diagdown NH^2\end{matrix}.$$

Ainsi l'éthanal donnerait l'alcool-amine, $CH^3.CHOH.NH^2$, que Delépine a démontré être l'hydrate de l'éthylidène-imine polymérisée,

$$(CH^3CH = NH)^3 + 3H^2O.$$

Nous nous sommes demandé si, en présence d'un catalyseur déshydratant, tel que la thorine par exemple, le gaz ammoniac ne pouvait pas réagir, à une température convenable, sur l'oxygène aldéhydique et donner naissance à une imine, qui serait instable à cette température et conduirait par perte d'hydrogène à un nitrile, suivant les réactions

$$RC\begin{matrix}\diagup\!\!\diagup O\\ \diagdown H\end{matrix} + NH^3 \rightarrow RCH = NH,$$

$$RCH = NH \rightarrow RCN + H^2.$$

L'expérience a complètement confirmé nos prévisions.

Lorsqu'on dirige sur une traînée de thorine, placée dans un tube de verre, chauffée à 420°-440°, des vapeurs d'aldéhyde isoamylique, en même temps que du gaz ammoniac, on obtient un dégagement gazeux permanent d'hydrogène.

Le liquide condensé à la sortie du tube catalyseur se sépare en deux couches, une aqueuse en proportion très notable, une seconde, moins dense, qui a été soumise au fractionnement. Elle fournit une faible quantité d'un produit distillant jusqu'à 125°, contenant un peu d'aldéhyde isoamylique non transformée, accompagnée d'isoamylnitrile, puis de 125° à 135°, une fraction importante, environ 40 pour 100 du liquide recueilli, ensuite le thermomètre monte, sans s'arrêter à un point fixe, de 135° à 300° et au-dessus.

La portion distillée de 125° à 135°, possède nettement l'odeur du nitrile isoamylique. Elle était sensiblement neutre. Pour vérifier qu'elle contenait

(¹) Séance du 28 janvier 1918.

bien ce nitrile, nous l'avons soumise à l'hydrogénation sur du nickel divisé. Nous avons recueilli un mélange d'isoamylamine, de diisoamylamine et d'un peu de triisoamylamine, que nous avons identifiées : 1° par leurs chlorhydrates; 2° par leur transformation inverse en isoamylnitrile sur le nickel divisé chauffé à 350°-370°.

Ce mélange d'amines provenant de l'hydrogénation du nitrile contenait une très petite portion de liquide inchangé.

Quant au produit distillant de 135° à 300°, il possédait une réaction alcaline. La moitié environ se dissout dans l'acide chlorhydrique, l'autre moitié constitue un produit de polymérisation de l'aldéhyde isoamylique. Nous avions pensé que les produits basiques dissous dans l'acide dilué pouvaient être constitués par un mélange de diisoamylamine et de triisoamylamine provenant de l'action de l'hydrogène naissant formé dans la réaction, sur l'imine $(CH^3)^2\,CH\,CH^2\,CH = NH$, ce qui aurait donné l'isoamylamine, qui, par perte d'ammoniac sur 2 ou 3 molécules, aurait fourni l'amine secondaire et l'amine tertiaire. Mais les bases régénérées de la solution chlorhydrique ne donnent pas de chlorhydrates solides par l'acide chlorhydrique concentré et ne fournissent pas le nitrile par déshydrogénation sur le nickel. D'autre part, elles commencent à se décomposer quand on les distille à la pression ordinaire. Ce sont vraisemblablement des produits de condensation de l'aldéhyde et de l'ammoniaque.

L'aldéhyde isobutylique fournit, dans les mêmes conditions de température que précédemment, en présence de gaz ammoniac, le nitrile isobutylique, bouillant à 108°, accompagné également de produits de condensation bouillant jusqu'à 300°.

Avec l'aldéhyde propylique, nous avons également obtenu le propane nitrile, $CH^3\,CH^2\,CN$. Par contre, l'aldéhyde ordinaire n'a pas donné la réaction. Elle a fourni des cristaux d'aldéhydate d'ammoniaque qui ont résisté à la destruction.

Parmi les aldéhydes aromatiques, nous avons essayé l'aldéhyde benzoïque. Ses vapeurs, dirigées sur la thorine chauffée à 420°-440° en même temps que du gaz ammoniac, ont fourni une notable proportion de nitrile benzoïque, accompagné d'un produit de condensation solide, se décomposant par distillation à la pression ordinaire. Le nitrile benzoïque, qui bout à 190°, est souillé d'un peu d'aldéhyde non transformée. Comme son point d'ébullition est voisin de celui de l'aldéhyde, il ne fallait pas songer, pour l'identifier, à le transformer en acide benzoïque. Nous avons fait sa combinaison avec le chlorure cuivreux en solution chlorhydrique, réaction carac-

téristique des nitriles aromatiques. Ensuite nous l'avons hydrogénée sur le nickel divisé, et nous l'avons transformée en un mélange de benzylamine et de dibenzylamine. Enfin, l'aldéhyde anisique, $C^6H^4 \begin{cases} OCH^3 (1) \\ COH\ (4) \end{cases}$, nous a fourni également le nitrile anisique, qui donne une combinaison cristallisée avec le chlorure cuivreux chlorhydrique. En dehors des produits de condensation obtenus dans cette réaction, on voit que l'action directe du gaz ammoniac sur les aldéhydes constitue une nouvelle méthode de formation des nitriles.

GÉOLOGIE. — *Sur l'existence de grandes nappes de recouvrement dans le bassin du Sebou (Maroc).* Note de MM. **L. Gentil**, **M. Lugeon** et **L. Joleaud**, présentée par M. Émile Haug.

Les grands traits de l'architecture du Maroc nous sont connus par une série de travaux auxquels l'un de nous a contribué pendant ces dix dernières années. Il s'est attaché, en particulier, à retracer l'histoire d'un bras de mer qui, compris entre la chaîne du Rif, au nord, l'Atlas et la Meseta marocaine, au sud, a permis un échange des eaux atlantiques et méditerranéennes avant l'ouverture du détroit de Gibraltar.

Le même auteur considérait ce *détroit sud-rifain* comme l'*avant-pays* du Rif; il constatait des traces manifestes de poussées vers l'extérieur de la chaîne, dans la région avoisinant les colonnes d'Hercule ([1]), et il ajoutait : « Je m'attends à voir des phénomènes analogues témoignant des mêmes poussées, de plis imbriqués, ou même de nappes, charriées vers la dépression du détroit sud-rifain » ([2]).

([1]) L. Gentil, *Compte rendu somm. Soc. géol. France*, 1911, p. 22 et suiv. Ces observations de M. Louis Gentil ont été contestées à diverses reprises et ses conclusions discutées. L'un des géologues espagnols qui se sont le plus utilement intéressés à la géologie du Nord du Maroc a même mis en doute ses observations dans le Rif occidental et admis que les calcaires jurassiques de la chaîne de l'Andjera, au lieu d'être poussés vers l'extérieur de la chaîne, comme le voulait M. Gentil, ont au contraire été charriés en sens inverse [Fernandez Navarro, *in Yebala y el bajo Lucus* (*R. Soc. esp. de Hist. nat.*; Madrid, 1914, p. 145 et suiv.); voir aussi J. Dantin Cereceda, *La zone espagnole du Maroc* (*Ann. de Géogr.*, n° 137, 25e année, 15 septembre 1916, p. 367)]. M. Gentil développera un peu plus tard toutes ses observations sur le Nord marocain. La présente Note apporte une confirmation définitive à toutes ses conclusions.

([2]) L. Gentil, *Le Maroc physique*, Paris, 1912, p. 90 et suiv.

Au cours d'un récent voyage effectué en commun, nous avons eu la bonne fortune, non seulement de confirmer ces prévisions, mais de reconnaître que ces phénomènes orogéniques revêtent une ampleur qui fait de cette partie de l'Afrique l'une des régions tectoniques les mieux caractérisées du bassin méditerranéen.

Dans cet ancien détroit il existe une zone de reliefs, d'altitudes généralement inférieures à 1000^m, qui dominent une sorte de couloir longeant la Meseta marocaine. Ce couloir n'est qu'une relique de l'ancien chenal, tandis que la région montagneuse qui, vers le nord, s'accole au Rif, est constituée par de grandes nappes de recouvrement ayant cheminé vers le sud. Nous lui donnerons le nom de *zone prérifaine*. Elle encadre le bassin hydrographique moyen et supérieur du Sebou, ce grand fleuve marocain qui occupe, par rapport au Rif, la même situation que le Guadalquivir par rapport à la Cordillère bétique.

Le *Prérif* forme un relief continu sensiblement est-ouest, de Taza à Meknès ; il s'incurve ensuite vers le nord, jusqu'à la traversée du Sebou, puis il prend une orientation nord-ouest, en se dirigeant sur Tanger.

Nous avons parcouru la bordure de cette région montagneuse. Elle nous est apparue comme caractérisée, dans ses grands traits, par trois zones stratigraphiques et tectoniques qui se différencient par la présence ou l'absence du Flysch et par la transgression du Burdigalien.

1. Au sud du Sebou, dans les chaînons de l'Outita, du Tselfatt, dans le massif en forme de dôme du Zerhoun et dans les montagnes de Fez, le Miocène inférieur à *Pecten præscabriusculus* Font. var. *numidus* Coq. et *P. subbenedictus* Font. est transgressif sur le Jurassique. Parfois une discordance angulaire s'observe, par exemple aux environs de Petijean, dans la gorge transversale de Bab Tisra. Dans le Zalar', qui domine Fez, le Burdigalien, très redressé, s'appuie sur le Lias.

Les chaînons constitués par ces noyaux jurassiques sont séparés par de vastes étendues de marnes helvétiennes, où apparaissent çà et là, sans ordre apparent, des noyaux triasiques caractérisés par leurs dépôts salifères.

2. Sur la rive droite du Sebou, dans les régions situées à l'est et au nord de Mechra bel Ksiri, les grès burdigaliens, parfois épais d'une cinquantaine de mètres, reposent directement sur le Trias. Par places, comme au camp d'Aïn Ouzif, dans le djebel Kourt, on voit s'intercaler, entre ces grès du premier étage méditerranéen et les marnes du deuxième étage, une zone argilo-sableuse, caractérisée par *Pecten scabrellus* Lamk. var *taurolævis* Sacco.

Nous avons pu observer la transgression burdigalienne dans le djebel Kourt, singulière montagne qui surgit brusquement au milieu d'un pays de marnes helvétiennes et qui est constituée par du Trias et du Miocène inférieur dont les relations réciproques sont très compliquées.

Nous avons également observé cette superposition du Burdigalien sur le Trias au nord-est de Mechra bel Ksiri, dans la montagne d'El Aloua. Celle-ci est formée par un anticlinal, plus ou moins rompu par des failles, et ne laissant apparaître que des masses isolées de grès burdigaliens ou de Trias, au milieu des marnes à Foraminifères de l'Helvétien. Au nord-est, l'anticlinal d'El Aloua se prolonge vers Souk el Arbâ du R'arb, où l'on voit du Nummulitique intercalé entre le Miocène et le Trias salifère.

3. Dans la région située entre Souk el Arbâ et Arbâoua, le Flysch, accompagné de Nummulitique calcaire, participe à la structure des montagnes. Sur ces terrains reposent directement les marnes helvétiennes, comme aux environs d'El Fokrá. A l'est et au nord, le Flysch affleure presque exclusivement : c'est le Rif proprement dit qui commence.

Les trois zones que nous venons de décrire s'échelonnent donc du sud au nord, de l'extérieur vers l'intérieur de la chaîne du Rif. Nous avons pu établir que la deuxième passe à la troisième par l'apparition progressive du Nummulitique dans l'architecture des plis. Il ne paraît pas en être de même des relations de la première zone avec la seconde, au moins dans la région que nous avons parcourue.

Il résulte de nos observations que la *région formée par les noyaux jurassiques, qui s'étend sur l'immense étendue comprise entre le Sebou et le couloir de Meknès à Fez, n'est pas autochtone. C'est une vaste région de nappes de recouvrement, dont les racines sont à rechercher dans le Rif lui-même.*

Ces grandes nappes, ou digitations de nappes, ont une amplitude que l'on peut estimer au moins à 80^{km}.

En outre, dominant cet empilement de nappes de charriage, il existe une autre masse de recouvrement, plus importante encore, formée exclusivement de Trias et qui, jadis, devait complètement envelopper toutes les nappes inférieures. Elle est réduite aujourd'hui à des lambeaux épars, amincis par les étirements et démantelés par l'érosion. Ses vestiges forment comme de vastes lentilles enrobées dans les marnes helvétiennes.

PALÉONTOLOGIE. — *Sur les analogies de la forme branchue chez les Polypiers constructeurs des récifs actuels avec celle des Stromatopores des terrains secondaires.* Note de M[lle] **Yvonne Dehorne**, présentée par M. Émile Haug.

On sait que, dans les formations récifales actuelles, les espèces coralliennes acquièrent des formes de plus en plus massives à mesure que le niveau du récif s'élève et se rapproche de la surface de la mer. Les Polypiers de la partie inférieure du récif sont des formes rameuses, à tiges grêles et

hautes; dans la zone intermédiaire, les Polypiers sont encore dendroïdes, mais leurs rameaux deviennent de plus en plus épais. On observe aussi des formes dressées et rameuses dans les eaux calmes et peu profondes, de même que sur le pourtour des lagunes intérieures au récif.

En résumé, les Polypiers rameux s'élèvent dans les eaux relativement calmes, tandis que les Polypiers étalés et massifs croissent dans des eaux agitées.

Cette variation de la forme, en relation avec la profondeur et l'état d'agitation du milieu marin, n'est pas spéciale aux seuls Coralliaires. Beaucoup d'autres organismes édificateurs de récifs, les Bryozoaires et certains Hydraires par exemple, placés dans des conditions identiques, subissent des modifications de même ordre.

J'ai retrouvé ces mêmes variations chez des Hydrozoaires constructeurs des récifs de l'ère Secondaire et en particulier chez les Stromatopores qui ont joué, dans l'édification de ces récifs, un rôle important.

Dans les calcaires lusitaniens du Portugal, des Stromatopores à croissance étalée sont mêlés à des rameaux brisés de Stromatopores branchus : j'ai désigné les premiers sous le nom de *Stromatopora Choffati* (1) et les seconds sous celui de *Str. arrabidensis* (2).

Une autre série de formes essentiellement rameuses, que j'ai rapportées au même genre, *Stromatopora Douvillei* n. sp., provient du Jurassique supérieur des environs de Tatahouine (Sud tunisien); je dois une partie de ces échantillons à l'obligeance de M. H. Douvillé; l'autre partie a été empruntée à la collection Pervinquière du Laboratoire de Géologie de la Sorbonne. Il est manifeste que ces Stromatopores dendroïdes présentent de grandes analogies avec *Milleporidium Remesi* Steinm. (3), et M. Douvillé (4) les a considérés comme des *Milleporidium;* ceux-ci cependant ne possèdent pas d'astrorhizes. Les rameaux des échantillons tunisiens sont, par contre, pourvus d'astrorhizes nombreuses et de grande taille, dont le centre est porté au sommet d'une petite éminence conique, caractère commun à beaucoup

(1) Y. Dehorne, *Sur un Stromatopore nouveau du Lusitanien de Cezimbra* (Portugal) (*Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 117).

(2) Y. Dehorne, *Stromatoporidés jurassiques du Portugal* (*Comm. Serv. géol. Portugal*, t. 13, n° 1, 1918).

(3) G. Steinmann, Milleporidium, *eine Hydrocoralline aus dem Tithon von Stramberg.* (*Beitr. Pal. u. Geol. Oest.-Ung. u. d. Orients*, t. 15, 1903).

(4) H. Douvillé, *Le Jurassique de l'Extrême-Sud Tunisien* (*Bull. Soc. géol. France*, 4e série, t. 8, 1908, p. 154).

de Stromatoporidés. Je leur ai trouvé des rapports très étroits avec le genre *Stromatopora* Goldf., dont ils ont les astrorhizes et la structure microscopique; ils ressemblent beaucoup à *Str. Choffati* et n'en diffèrent que par la forme, qui est dendroïde au lieu d'être aplatie et massive, et par le moins grand nombre des tubes zooïdaux, mais ceci tient sans doute à ce que *la forme massive étalée est une sorte de condensation du type rameux.*

Un autre Stromatopore jurassique, voisin des deux espèces que je viens de comparer entre elles, mais surtout semblable à *Stromatopora arrabidensis*, a été recueilli dans les couches portlandiennes de la Dobrogea par M. Anastasiu. C'est une forme courte et multidigitée, ou bien dendroïde et à rameaux épais. La base toujours massive, la vermiculation de la surface extérieure des échantillons et le peu de netteté que présentent les systèmes astrorhizaux sont des caractères analogues à ceux de *Str. arrabidensis.* Dans les sections microscopiques, on remarque une région centrale à mailles lâches (coupe transversale de canaux à parcours vertical) et une région corticale à tissu serré, constituée par des couches concentriques régulières, dans laquelle se trouvent localisés les tubes zooïdaux tabulés; la même disposition s'observe chez *Str. arrabidensis*, *Str. Douvillei*, *Milleporidium Remesi*, chez une espèce dévonienne *Str. bücheliensis* Bargatsky sp., var. *digitata* Nicholson et chez la plupart des polypiers dressés. Enfin, caractère qui fut invoqué par Steinmann pour rapprocher l'Hydrozoaire de Stramberg du genre *Millepora*, certains tubes zooïdaux sont beaucoup plus grands que les autres, seulement la surface ne présente pas trace de gastropores ni de dactylopores et elle porte des astrorhizes. J'ai donné à cette nouvelle espèce le nom de *Stromatopora romanica.*

Il est intéressant de se représenter le milieu où toutes ces formes du Jurassique supérieur ont prospéré, en s'aidant des exemples actuels et en se basant sur la nature des dépôts et des faunes qui se trouvent généralement dans les formations récifales à Stromatopores.

Si la forme massive et contournée des Stromatopores indique un milieu agité et le voisinage de la surface des eaux, il est possible d'imaginer que ce fut l'habitat ordinaire des Actinostromidés, car le genre cénomanien *Actinostromaria* Mun.-Chalm. [île Madame (Charente-Inférieure), la Bédoule (Bouches-du-Rhône)] et les espèces sénoniennes [(*A. Kiliani*, Martigues, (Bouches-du-Rhône)] et dévoniennes (*A. clathratum*, *A. bifarium*, etc.) du genre *Actinostroma* Nich. sont représentés par des colonies compactes, étalées ou hémisphériques, souvent énormes.

Les Stromatopores rameux et trapus du Portugal (*Stromatopora arra-*

bidensis) et de la Roumanie (*Str. romanica*) correspondraient à des types d'eaux assez calmes, mais encore peu profondes. Enfin, les formes branchues, hautes et graciles du Sud-Tunisien (*Str. Douvillei*) se seraient développées dans des eaux tranquilles et plus profondes.

BOTANIQUE. — *Sur la plasmolyse des cellules épidermiques de la feuille d'*Iris germanica. Note [1] de M. A. **Guilliermond**, présentée par M. Gaston Bonnier.

Les cellules épidermiques de la feuille d'*Iris germanica* constituent un objet exceptionnellement favorable à l'étude cytologique de la plasmolyse. Examinées sur le vivant dans une solution isotonique, elles montrent avec une remarquable netteté tous les détails de leur structure. Ce sont d'énormes cellules pourvues d'une membrane allongée, assez épaisse, avec de nombreuses ponctuations assez régulièrement espacées. Le cytoplasme est formé par une couche pariétale entourant une grosse vacuole centrale et par un certain nombre de fines trabécules qui traversent cette vacuole reliant la couche pariétale au noyau. Il offre une apparence homogène et hyaline, et renferme un chondriome très riche et parfaitement distinct, constitué en partie par des mitochondries granuleuses, en partie par des chondriocontes très allongés. On y observe, en outre, de nombreuses gouttelettes graisseuses se distinguant facilement des mitochondries par leur réfringence beaucoup plus accusée. La vacuole renferme, ordinairement à l'état de solution, un composé phénolique incolore.

La plasmolyse produite par des solutions à divers degrés de concentration de NaCl et de saccharose se traduit par une série de phénomènes très caractérisés.

Le début consiste en une rétraction partielle de la masse cytoplasmique (protoplaste) qui se détache de place en place de la membrane cellulosique, puis au bout d'un certain temps cette rétraction s'achève. Dans les cellules peu allongées, tout le cytoplasme se contracte au milieu de la cavité cellulaire sous forme d'une masse arrondie. Dans les cellules très allongées, le cytoplasme en se contractant se divise par étranglement en plusieurs masses arrondies, de dimensions inégales, disposées le long de la cellule et réunies l'une à l'autre par un mince trabécule; chacune de ces masses renferme un fragment de la vacuole. Le protoplaste contracté offre toujours un contour parfaitement régulier comme s'il était délimité par une paroi. Il reste cependant rattaché à la

---

(1) Séance du 14 janvier 1918.

membrane cellulosique par de minces filaments plus ou moins dichotomisés. La signification de ces filaments a été l'objet de controverses. Tandis que Kohl les considère comme des communications protoplasmiques entre les cellules (plasmodesmes), Chodat et Boubier les attribuent à la paroi périplasmique qui en vertu de sa viscosité conserverait des adhérences avec la membrane cellulosique. Les cellules épidermiques de la feuille d'*Iris germanica* permettent de constater qu'un certain nombre de ces filaments passent dans les ponctuations de la membrane cellulosique et sont en rapport avec les filaments correspondants des cellules voisines. On peut donc admettre, avec Strasburger, que si un certain nombre de ces filaments sont attribuables à une adhérence du cytoplasme avec la membrane cellulosique, d'autres représentent incontestablement des plasmodesmes.

Dès le début de la plasmolyse, le cytoplasme est le siège de phénomènes très nettement caractérisés. Il se décompose en une série de bourgeons qui viennent faire hernie dans la vacuole et ne tardent pas à se transformer en vésicules constituées par un liquide aqueux entouré d'une paroi dense extrêmement mince. Ces hernies se gonflent beaucoup et présentent des déformations et des mouvements d'oscillation incessants. Quelques-unes d'entre elles arrivent à se détacher du reste du cytoplasme qui les réunit et sont mises en liberté dans la vacuole. Les figures formées par ces hernies présentent une ressemblance frappante avec des figures myéliniques, mais elles n'ont aucune biréfringence et ne réduisent pas l'acide osmique.

A un stade ultérieur ces hernies vésiculeuses cessent de se mouvoir et en se contractant assez fortement déterminent par leur ensemble un aspect alvéolaire très particulier du cytoplasme avec petites alvéoles en forme de boyaux ou d'haltères limitées par une trame extrêmement mince, assez réfringente et d'allure rigide.

Cet aspect alvéolaire de la cellule plasmolysée, déjà signalé par Schwartz, puis par Matruchot et Molliard, a été considéré par ces derniers comme le résultat d'un phénomène d'exosmose, consistant en une séparation de l'eau de constitution du cytoplasme qui se déposerait dans ce dernier sous forme de petites vacuoles dont le contenu se diffuserait peu à peu dans la vacuole centrale.

Au cours de ces phénomènes, le noyau se contracte légèrement et les mitochondries n'offrent pas la moindre altération.

Dans cette phase, la cellule est encore vivante : elle est imperméable à l'éosine et perméable seulement aux colorants vitaux (rouge neutre et bleu de Nil) qui se fixent sur les composés phénoliques dissous dans la vacuole. Enfin, transportée dans une solution isotonique, elle se gonfle et reprend son allure normale. Par son aspect rigide très spécial, le cytoplasme donne l'impression d'avoir acquis le maximum de déshydratation compatible avec sa vie.

Au bout d'un temps variable, selon le degré de concentration de la solution hypertonique, la mort survient, par suite sans doute de la déshydratation plus complète du cytoplasme amenant sa désorganisation.

Cette mort se manifeste par le fait que le cytoplasme devient perméable à l'éosine et en même temps par une modification très nette de l'aspect de la cellule qui semble attribuable à une réhydratation du cytoplasme. On observe un gonflement des petites alvéoles qui s'arrondissent, puis leur disparition partielle, et le cytoplasme prend un aspect homogène et plus fluide, caractérisé en outre par des mouvements browniens

de ses mitochondries et de ses gouttelettes graisseuses. Pendant ce temps, les mitochondries se gonflent peu à peu, et le noyau lui-même se dilate d'une manière assez appréciable en modifiant sa structure qui apparaît constituée par un nucléoplasme très aqueux renfermant en suspension une chromatine granuleuse. Au début, le cytoplasme reste très nettement limité extérieurement; cependant la paroi périplasmique perd son élasticité, le noyau montre une tendance à faire saillie au dehors; parfois de petites vacuoles s'exsudent à l'extérieur du cytoplasme. Enfin cette paroi disparaît, le cytoplasme se distend et se dissémine dans la cavité cellulaire sous forme d'un précipité granuleux.

En même temps, les vésicules mitochondriales se gonflent de plus en plus. Par contre, la paroi périvacuolaire persiste la dernière et la vacuole apparaît en quelque sorte isolée du cytoplasme désorganisé, en conservant un contour parfaitement régulier. Dans une phase ultime, cette vacuole disparaît à son tour et le noyau très gonflé finit par éclater et se résorber.

« Nous ne discuterons pas ici la question si complexe de la nature des parois périplasmiques et périvacuolaires, bien que nos observations nous disposeraient plutôt à les considérer comme des formations transitoires que comme des organes différenciés. »

On voit donc en somme que les solutions hypertoniques n'exercent aucune action sur le chondriome tant que la cellule reste vivante. Ce n'est qu'au moment où la cellule meurt et où le cytoplasme s'hydrate et en se désorganisant finit par mettre en liberté les mitochondries dans le liquide de la cavité cellulaire que les mitochondries se gonflent et se transforment en grosses vésicules.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Genèse de l'inuline chez les végétaux.* Note de M. H. Colin, présentée par M. Gaston Bonnier.

La genèse de l'inuline, chez les végétaux, est encore imparfaitement connue; d'après certains auteurs, l'inuline se forme dans les feuilles; elle émigre ensuite, comme telle, vers les racines ou les tubercules; d'autres pensent que les organes à réserve inulacée ne reçoivent des feuilles autre chose que des sucres qui se condensent ultérieurement à l'état d'inuline. On reconnaît immédiatement les deux théories proposées pour expliquer l'accumulation du sucre cristallisable dans la racine de la Betterave.

L'étude de quelques plantes à inuline, aux diverses époques de la végétation, m'a conduit aux conclusions suivantes :

1° *Topinambour.* — Le *parenchyme foliaire* renferme des sucres et de l'amidon; on y chercherait en vain la moindre trace d'inuline; les sucres

sont un mélange de saccharose, de glucose et de lévulose. L'inuline n'apparaît pas davantage dans la *nervure médiane* et le *pétiole*. Dès qu'on aborde la *tige*, on se trouve en présence de quantités importantes d'inuline; le sommet lui-même de la tige en renferme; à la base du pétiole, le signe polarimétrique du suc est positif; le suc de la tige est toujours fortement lévogyre. Du haut en bas de la tige et jusque dans la *racine pivotante* le rapport de l'inuline au sucre total ne cesse de croître; il devient maximum dans les *tubercules*. Contrairement à ce qu'affirme H. Fischer (1), on ne rencontre jamais, dans les tubercules même très jeunes, que de faibles quantités de réducteur : c'est tout le long de la tige, plutôt que dans les tubercules, que s'effectue la condensation du réducteur à l'état d'inuline; au saccharose près, aperçu déjà par Dubrunfaut (2), la totalité de la réserve hydrocarbonée du tubercule est représentée par de l'inuline.

Ces conclusions ressortent d'elles-mêmes du Tableau suivant, où sont consignées les quantités d'hydrates de carbone contenues dans les différentes régions de la plante. Il s'agit d'une série de dosages effectués au début du mois d'août, à la fin d'une journée chaude et lumineuse. Le rapport des différents hydrates de carbone au sucre total importe seul; les valeurs absolues subissent des variations considérables suivant les conditions de la végétation.

Hydrates de carbone dans 100g de matériel frais.

Parties analysées.	Sucre total (en interverti).	Réducteur.	Saccharose.	Amidon.	Inuline.	$\frac{\text{Inuline}}{\text{Sucre total}}$.
	g	g	g	g	g	g
Parenchyme foliaire.....	»	0,09	0,20	1,84	0	0
Nervures secondaires....	»	0,12	0,16	1,93	0	0
Nervure médiane........	»	0,31	0,09	0,93	0	0
Pétiole...............	»	0,24	0,14	0,50	0	0
Tige : sommet..........	0,94	0,54	0,22	»	0,15	0,15
» milieu...........	1,16	0,10	0,19	»	0,74	0,63
» base.............	2,67	0,08	0,40	0	1,86	0,69
Racine pivotante........	5,81	0,09	0,57	0	4,39	0,75
Stolons...............	8,01	traces	0,75	0	6,57	0,82
Petits tubercules (1g).....	9,15	»	0,85	0	7,42	0,81
Gros tubercules (10g-20g).	7,38	»	0,34	0	6,31	0,85

(1) H. FISCHER, *Cohns Beitr.*, t. 8, 1898, p. 93.

(2) DUBRUNFAUT, *Comptes rendus*, t. 64, 1867, p. 764.

2° *Chicorée.* — La Chicorée offre un autre genre de plantes à inuline, en ce sens que le bouquet foliaire s'insère directement sur la racine. Grafe (1) dit avoir rencontré, dans le parenchyme des feuilles, une certaine proportion d'inuline qui ne fait que croître dans la nervure médiane et le pétiole; le réducteur accompagnant l'inuline serait formé exclusivement de lévulose.

Ces affirmations sont inconciliables avec le pouvoir rotatoire résultant, généralement positif, des hydrates de carbone solubles de la feuille, aussi bien qu'avec la présence, dans les chloroplastes, de corpuscules semblables aux grains d'amidon, de l'avis de Grafe, et qui, soumis à l'hydrolyse diastasique, donnent bien, en effet, du maltose et du glucose. L'épuisement méthodique du parenchyme foliaire n'entraîne pas d'inuline; de plus, l'oxydation par le brome ou par l'iode en présence de carbonate de soude, des jus déféqués, révèle, comme le polarimètre, la présence du glucose dans le limbe et le pétiole.

En réalité, les feuilles de Chicorée, comme celles de Topinambour et de Dahlia, renferment du réducteur, du saccharose et de l'amidon; la proportion de réducteur est plus grande dans la nervure médiane et dans le pétiole; au niveau du collet, le signe polarimétrique change brusquement; l'inuline est prépondérante dans la racine, mais le réducteur et surtout le saccharose sont constamment représentés.

Ces résultats sont implicitement contenus dans le Tableau ci-dessous; ils se rapportent à la Chicorée dite de *Magdebourg*, récoltée à Verrières, aux Établissements de Vilmorin, le 27 juillet à 14h; les recherches de Grafe ont porté sur la même variété.

Hydrates de carbone dans 100g de matériel frais.

Parties analysées.	Sucre total (en interverti).	Réducteur.	Saccharose.	Amidon.	Inuline.	Inuline / Sucre total.
	g	g	g	g	g	g
Limbe	»	0,24	0,12	0,50	0	0
Nervure ...	»	0,91	0,10	0,25	0	0
Pétiole	0,87	0,77	0,10	0	0	0
Racine	10,37	0,61	0,95	0	7,89	0,76

Conclusion. — En ce qui concerne la Chicorée, le Dahlia, le Topinambour, il ne saurait être question de l'élaboration immédiate de l'inuline

(1) V. Grafe et V. Vouk, *Biochem. Zeitschr.*, t. 43, p. 424, et t. 47, 1912, p. 320.

par la feuille et de sa migration, comme telle, vers les organes souterrains. C'est la loi de Maquenne, c'est-à-dire le principe des pressions osmotiques, qui préside à la mise en réserve de l'inuline comme à l'emmagasinement du saccharose : les feuilles ne délivrent à la plante que des sucres dont la condensation s'effectue tout le long de la tige ou seulement dans les tubercules ou les racines.

THÉRAPEUTIQUE. — *Contribution à l'étude physiologique des vaccins antityphoïdiques en solution aqueuse.* Note (¹) de MM. **J. Gautrelet** et **E. Le Moignic**, transmise par M. Charles Richet.

On n'a que peu de documents expérimentaux sur l'action physiologique des vaccins typhoïdiques et paratyphoïdiques en solution aqueuse, ou, si l'on préfère, des suspensions dans le sérum physiologique de bacilles typhoïdiques et paratyphoïdiques tués par la chaleur, telles qu'elles sont utilisées pour la confection des vaccins.

Les vaccins aqueux employés au cours de nos recherches ont été préparés à l'Institut Pasteur par M. Alb. Sezary : cultures de 24 heures, 1 heure 30 minutes de chauffage à 60°. Ils ont été utilisés 30 jours environ après leur préparation.

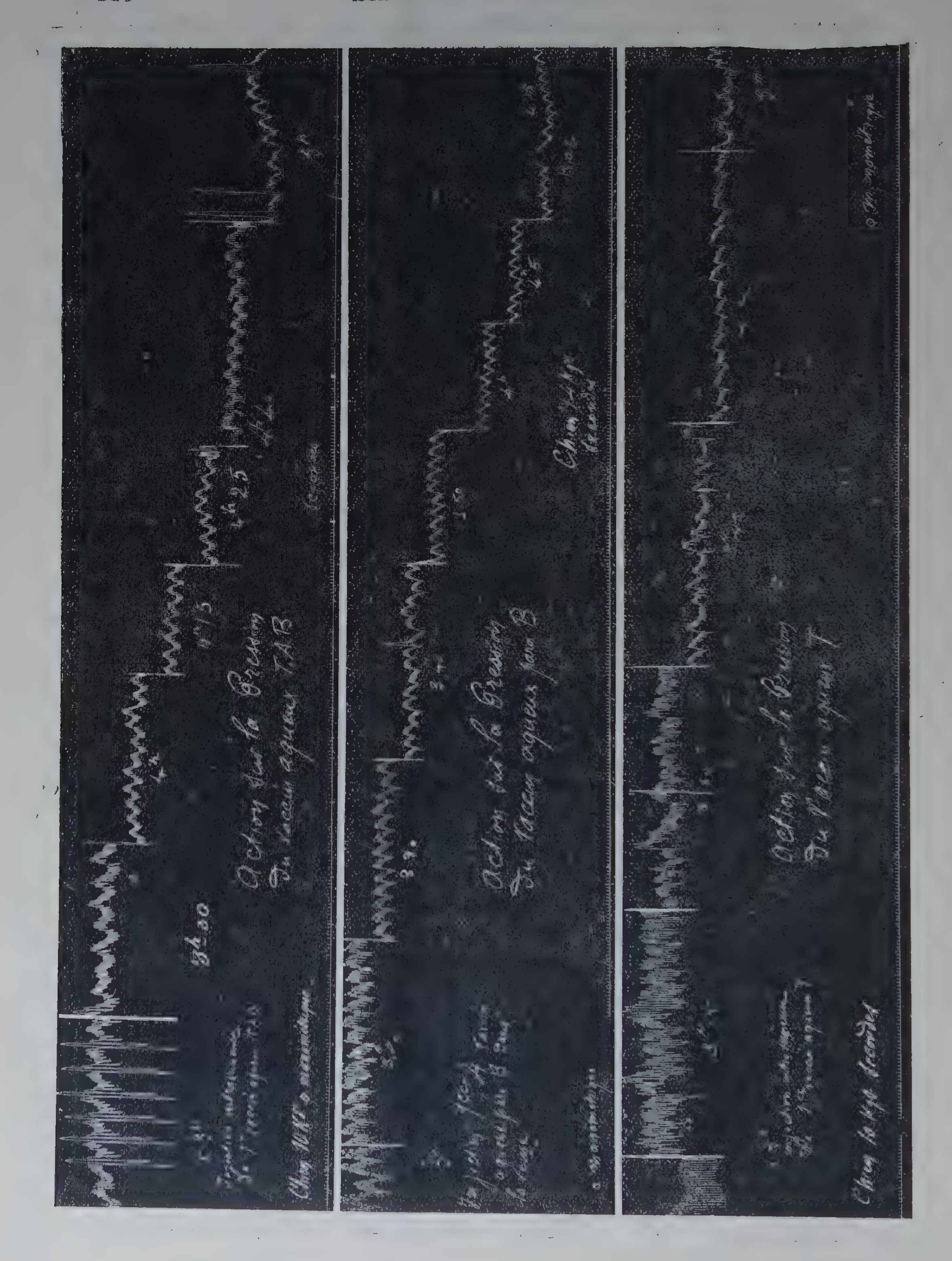
Nous avons utilisé aussi bien des vaccins polyvalents T. A. B. (renfermant par centimètre cube 2^{mg} de bacilles typhoïdiques; 2^{mg} de bacilles paratyphoïdiques A et $1^{mg},5$ de bacilles paratyphoïdiques B, soit plus de 7 milliards de bacilles que des vaccins monovalents contenant uniquement des bacilles paratyphoïdiques A ou B.

Nous injections de façon constante chez le chien un dixième de centimètre cube de vaccin par kilogramme d'animal dans la *veine* saphène tibiale.

De la lecture de nos multiples protocoles d'expériences on doit retenir qu'après une demi-heure environ, à la suite d'injections de vaccins aqueux polyvalents ou renfermant uniquement des bacilles paratyphoïdiques A, et surtout B, commence une baisse de la pression sanguine qui va s'accentuant progressivement, la pression pouvant atteindre le chiffre de 4^{cm} de mercure après deux heures, et se maintenir telle jusqu'à la fin de l'expérience ; en même temps le cœur diminue considérablement d'amplitude, devenant à peine perceptible.

Après injection de vaccin éberthien, la chute de la pression est à peine

(¹) Séance du 28 janvier 1918.



marquée, mais l'amplitude du cœur est diminuée, son rythme est troublé [1].

On en jugera par les tracés (réduits de moitié) ci-joints.

Les phénomènes dyspnéiques, asphyxiques même, indiquent déjà une action bulbaire. L'atropine, en diminuant considérablement la baisse de pression après injection de vaccin T.A.B., met en évidence la part qui revient au pneumogastrique, démontrant également ainsi l'origine bulbaire et cardiaque, en partie tout au moins, des phénomènes circulatoires observés.

Le mécanisme nerveux de l'hypotension est en outre traduit par l'oncographe : nous avons pu enregistrer au cours de l'intoxication une vaso-constriction progressive du rein, qui correspond, sans aucun doute, à une vaso-dilatation abdominale dont les effets se traduisent par la chute de pression.

Que les toxines typhoïdiques et paratyphoïdiques touchent la moelle, le fait paraît hors de doute quand on observe l'animal éveillé auquel on injecte de mêmes doses de vaccins aqueux. Le ténesme très accusé, la diarrhée, les mictions, les vomissements répétés (biliaires surtout) que ne masque plus l'anesthésie, traduisent alors manifestement l'action bulbaire.

Du rapprochement des symptômes fonctionnels observés chez le chien éveillé et des phénomènes circulatoires enregistrés chez le chien anesthésié, il est permis de déduire les conclusions les plus utiles. Celles-ci sont complétées par les recherches toxicologiques.

Le chien survit à l'injection intra-veineuse de $\frac{2}{10}$ de centimètre cube par kilogramme de vaccin aqueux T. A. B.; il meurt dans les 12 heures qui suivent l'injection de $\frac{3}{10}$ de centimètre cube par kilogramme; dans les 6 heures qui suivent l'injection de $\frac{4}{10}$ de centimètre cube par kilogramme.

Pour ce qui est du vaccin renfermant uniquement des bacilles paratyphoïdiques A, l'animal survit à une dose de $\frac{2}{10}$ de centimètre cube par kilogramme; il meurt dans les 36 heures qui suivent l'injection de $\frac{3}{10}$ de centimètre cube par kilogramme.

La toxicité du vaccin aqueux paratyphoïdique B est de même ordre : $0^{cm^3},3$ par kilogramme tuent en 24 heures.

Quant au vaccin typhoïdique, il est infiniment moins toxique : 2^{cm^3} par kilogramme n'entraînant pas la mort.

---

(1) Pour ce qui est des réactions à la toxine typhoïdique, Muron Tchilian a signalé la sensibilité de la fibre cardiaque, du tissu artériel, et des centres vaso-moteurs; Arloing et de Lagoanère, son action hypotensive modérée; Gleghom, Chantemesse et Lamy, Pezzi et Savini, son action sur le myocarde, H. Vincent, l'action sur les plexus intra-cardiaques.

CHIRURGIE. — *Études sur la cicatrisation des plaies.* Note [1] de MM. **Tuffier** et **Desmarres**, transmise par M. Charles Richet.

L'action thérapeutique d'un agent physique ou chimique sur la cicatrisation des plaies peut être appréciée par la *rapidité* du processus cicatriciel.

La marche de la cicatrisation d'une plaie stérilisée *superficielle* (par plaie stérilisée nous entendons une plaie dans laquelle l'examen microscopique ne révèle pas plus d'un ou deux microbes par champ oculaire) a été étudiée au *Rockefeller Institute* de Compiègne par M. Lecomte du Noüy sous la direction du Dr Carrel. Une formule a pu être établie, qui permet de représenter graphiquement *a priori* par une courbe le processus de la cicatrisation normale d'une plaie superficielle traitée par l'hypochlorite de soude. Formule de cicatrisation et courbe sont obtenues facilement par deux mesures. Les surfaces successives sont mesurées à 4 jours d'intervalle.

On compare à cette courbe *théorique* la courbe *réelle* de cicatrisation, obtenue en portant sur le même graphique les surfaces successives de la plaie mesurées à intervalles suffisamment rapprochés.

Nous avons constaté la concordance constante des prévisions *mathématiques* et des constatations *cliniques* pour les plaies convenablement traitées.

Une méthode analogue, appliquée à l'étude de la cicatrisation de six plaies *profondes*, nous a permis de constater que ces plaies peuvent se cicatriser au moins aussi rapidement, sinon plus, que des plaies superficielles de même contour.

Cette première série d'observations nous a permis en outre de formuler les hypothèses suivantes sur le processus *du tissu de cicatrice ;* la circulation sanguine amène les substances chimiques nécessaires à la rétraction de la plaie (rétraction inodulaire) et à la prolifération épithéliale. S'il ne survient pas d'infection microbienne intense ou spéciale, l'apport est régulier, et on peut prédire la date de la cicatrisation. Si le processus de l'épidermisation est retardé ou même arrêté momentanément par une infection, l'apport continu des substances nécessaires à l'épidermisation *s'emmagasine* dans la plaie; puis, tout obstacle infectieux cessant, la marche de la nouvelle épidermisation est beaucoup plus rapide que normalement et peut même

---

[1] Séance du 28 janvier 1918.

dépasser la courbe théorique. Il semble que l'infection a fait disparaître seulement l'épithélium et laissé dans la plaie les substances chimiques qui activent l'épidermisation.

Nous avons cherché s'il n'était pas possible par certains procédés, tout en conservant pour base la désinfection par le liquide de Dakin, d'obtenir une cicatrisation *plus rapide*. Nos observations, qui ont porté sur 13 plaies, nous ont conduits aux conclusions suivantes :

1° Un simple pansement stérile, sec et absorbant, appliqué sur une plaie stérile, amène une cicatrisation *un peu* plus rapide que la méthode de Dakin. Cela s'explique par le fait que tout antiseptique détruit les microbes, mais atteint aussi les cellules vivantes et gêne la cicatrisation dans une certaine mesure. Ce pansement ne peut d'ailleurs être couramment employé à cause *des chances de réinfection*. Il ne doit être renouvelé que rarement. En effet, chaque fois qu'on change le pansement, on détruit par arrachement une partie de l'épidermisation acquise; nous avons eu la preuve anatomique de cette destruction.

2° Partant de ce fait qu'un composé chimique microbicide employé exclusivement semble perdre, rapidement parfois, son pouvoir, par une sorte d'accoutumance des organismes et qu'il peut y avoir avantage à user de composés différents se succédant suivant un cycle répété jusqu'à cicatrisation complète, nous avons tenté, par analogie, d'alterner les pansements aseptiques suivant le cycle (hypochlorite de soude — sérum physiologique — eau bouillie — pansement sec) ainsi à peu près que M. Charles Richet l'avait proposé pour la désinfection des plaies, en parlant des médications antiseptiques alternantes.

Les gains obtenus ont été *minimes :* 5 à 6 jours sur une durée totale de 30 à 35 jours prévus.

Au contraire, *l'héliothérapie*, associée soit à l'hypochlorite, soit à un *pansement avec substances neutres* (oxyde de zinc, sous-gallate de bismuth), nous a toujours donné des résultats positifs très nets, et nous avons obtenu souvent des gains considérables pouvant atteindre une *quinzaine de jours sur une durée prévue de* 35 *jours*.

Toutefois le pansement avec substance neutre ne doit être appliqué qu'au *moment* opportun.

Dans nos examens microscopiques *systématiques*, faits avec la collaboration de M. Chick, nous avons constaté dans la plaie, à des moments

variables, un *réseau fibrineux* contenant des mononucléaires. L'apparition de ce réticulum coïncide toujours avec la période de cicatrisation de la plaie et n'apparaît qu'au moment où l'épidermisation se manifeste ou s'accentue. A ce moment, quel que soit le nombre des microbes trouvés, l'évolution de la cicatrisation se poursuit sans être influencée par leur présence.

A cette période, un pansement microbicide n'active en rien la marche de la cicatrisation; il est donc inutile, sinon nuisible par son pouvoir destructeur des cellules réparatrices.

Il semble donc exister dans l'évolution des plaies *deux périodes:* l'une qui réclame la destruction des microbes et de tous les éléments qui en favorisent l'évolution, l'autre dans laquelle la destruction microbienne n'est pas indispensable à la cicatrisation et où les pansements stériles, absorbants et protecteurs de l'épidermisation, suffisent.

A 16 heures et quart l'Académie se forme en comité secret.

La séance est levée à 17 heures et demie.

É. P.